Forgalomirányítási algoritmusok matematikai alapjai

Megjegyzés:. *A következőkben használt gráfelméleti alapfogalmak a* **DNS gráfok** *c. fejezetben találhatók. A következőkben az orientált és az irányított gráfok között nem teszünk különbséget és csak irányított gráfokról beszélünk. Szimmetrikus irányított (orientált) élek tehát megengedettek. Valamely $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráf csúcsainak számát N-nel, éleinek számát A-val jelöljük.*

Tétel:. *Legyen $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ összefüggő gráf és legyen $\mathcal{S}$ az $\mathcal{N}$ valamely valódi részhalmaza. Létezik legalább egy olyan $(i, j) \in \mathcal{A})$ él, amelyre $i \in \mathcal{S}$ és $j \notin \mathcal{S}$.*

Bizonyítás.

Definíció:. *A $G' = (\mathcal{N}', \mathcal{A}')$ gráf a $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráf* **részgráfja**, *ha $\mathcal{N}' \subseteq \mathcal{N}$ és $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$.*

Definíció:. *A* **fa** *olyan összefüggő gráf, amelyben nincsen kör. Valamely G gráf* **feszítő fája** *G olyan részgráfja, amely fa és G minden csúcsát tartalmazza.*

Legyen $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ tetszőleges összefüggő gráf. A G egy lehetséges részgráfjának megalkotásához tekintsük a következő algoritmust:

1. Legyen n tetszőleges csúcs $\mathcal{N}$-ből. Legyen $\mathcal{N}' = \{n\}$ és $\mathcal{A}' = \{\}$.
2. Ha $\mathcal{N} = \mathcal{N}'$, akkor álljunk meg, különben folyatás 3.-tól.
3. Legyen (i, j) olyan él, amelyre $i \in \mathcal{N}'$ és $j \in \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}'$. Legyen

$$\begin{aligned} \mathcal{N}' &:= \mathcal{N}' \cup \{j\} \\ \mathcal{A}' &:= \mathcal{A}' \cup \{(i, j)\}. \end{aligned}$$

Folytatás 2.-től.

Tétel:. *Tetszőleges összefüggő $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráf esetén a fenti algoritmus a G egy feszítő fáját eredményezi.*

Bizonyítás.

Következmény:. *Valamely N csúcsból álló összefüggő G gráfhoz mindíg van $N - 1$ élt tartalmazó feszítő fa.*

Következmény:. *Ha a $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ gráf összefüggő, akkor $A \geq N - 1$.*

Következmény:. *A G összefüggő gráf akkor és csak akkor fa, ha $A = N - 1$.*

Minimális súlyú feszítő fa

Legyen $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ összefüggő gráf. Tegyük fel, hogy minden $(i, j) \in \mathcal{A}$ élhez hozzá van rendelve egy w_{ij} valós szám, amelyet az (i, j) él súlyának nevezzük. Konstruáljunk meg G-hez egy olyan feszítő fát, amelyben az élekhez tartozó súlyok összege minimális a lehetséges feszítő fákat tekintve. Az ilyen feszítő fát **minimális súlyú feszítő fának** nevezzük.

Definíció:. *Valamely M minimális súlyú feszítő fa tetszőleges részfáját* **töredéknek** *(fragment) nevezzük.*

Tétel:. *Legyen F egy tetszőleges töredék, legyen $\alpha = (i, j)$ minimális súlyú F-ből kimenő él. Az $F' = F \cup (\{j\}, \{(i, j)\})$ szintén töredék.*

Bizonyítás.

A fenti tétel alapul szolgálhat valamely minimális súlyú feszítő fa megalkotásához.

Prim-Dijkstra féle algoritmus:. *Induljunk ki egy tetszés szerinti csúcsból. Definíció szerint ezen egyetlen csúcsból álló gráf szükségképpen töredék. Bővítsük ki ezt lépésenként további csúcsokkal és élekkel az előző tétel szerint. ilyen módon mindíg töredékhez jutunk, ami N lépés után az összes csúcsot tartalmazni fogja, ezért ez utóbbi már minimális súlyú feszítő fa.*

A gyakorlati alkalmazások szempontjából fontosak azok az algoritmusok. amelyek esetén egyidejűleg egyszerre több töredék bővitését is megtehetjük.

Kruskal algoritmus:. *Tegyük fel, hogy egyetlen minimális súlyú feszítő fa létezik. Legyenek $F_1, F_2, ..., F_n$ diszjunkt töredékek (az egyes töredékek csúcsainak hamazai páronként diszjunktak). Bővítsük ki párhuzamosan az egyes töredékeket a fenti tételnek megfelelően a minimális súlyú kimenő élekkel és azok végpontjával. Ilyen módon újra a töredékek egy páronként diszjunkt $F'_1, F'_2, ..., F'_m$ halmazához jutunk. Az algoritmust addig folytathatjuk, amíg egyetlen olyan töredékhez nem jutunk, amely az összes csúcsot tartalmazza. Ez a töredék szükségképpen az egyetlen minimális súlyú feszítő fa.*

A Kruskal algoritmusban a bővítések természetesen aszinkron módon is végrehajthatók.

Tétel:. *Ha minden w_{ij} súly különbőző, akkor csak egyetlen minimális súlyú feszítő fa létezik.*

Bizonyítás.

Legrövidebb út

Legyen a továbbiakban $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ irányított gráf. A $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ irányított gráfhoz hozzárendelhetjük a $G' = (\mathcal{N}', \mathcal{A}')$ irányítatlan gráf, amelyre $\mathcal{N}' = \mathcal{N}$ és $(i, j) \in \mathcal{A}'$ akkor és csak akkor, ha vagy $(i, j) \in \mathcal{A}$ vagy $(j, i) \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy az $(n_1, n_2, ..., n_l)$ láncolat (bejárás), lánc (út) vagy ciklus (kör) a G irányított gráfban, ha láncolat (bejárás), lánc (út) vagy ciklus (kör) a hozzárendelt G' gráfban. Az $(n_1, n_2, ..., n_l)$ irányított láncolat (bejárás) G-ben, ha minden $1 \leq i << \leq l - 1$-re: $(n_i, n_{i+1}) \in \mathcal{A}$. Irányított lánc (út) olyan irányított láncolat, amelyben minden csúcs különböző. Irányított ciklus (kör) olyan irányított láncolat, amelyben $l > 2$ és $n_1 = n_l$. Valamely irányított gráf **erősen összefüggő**, ha bármely két különböző i és j csúcsához van legalább egy $(i = n_1, ..., n_l = j)$ i-ből a j-be vezető irányított út.

Legyen $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ irányított gráf, amely erősen összefüggő, és tegyük fel, hogy minden $(i, j) \in \mathcal{A}$ élhez hozzá van rendelve egy d_{ij} valós szám, amelyet az (i, j) él hosszának nevezhetünk (bár d_{ij} nem szükségképpen nem negatív). Ha $p = (i, j, ..., l, m)$ valamely irányított út G-ben, akkor legyen a p hossza: $d_{i,j} + d_{j,k} + ... + d_{l,m}$. A **legrövidebb út** probléma úgy fogalmazható meg, hogy határozzuk meg a G gráfban tetszőleges két különböző csúcs között a legrövidebb utat.

A következőkben a G gráf valamely generikus 1 címkéjű csúcsát tekintjük és az 1 csúcs és az összes $i \neq 1$ csúcs közötti 1-ből az i-be vezető legrövidebb út meghatározásával foglalkozunk. Ez a probléma ekvivalens azzal a problémával, hogy határozzuk meg az összes $i \neq 1$ csúcshoz az i-ből ez 1 be vezető legrövidebb utat. Ha ugyanis az első feldathoz van megoldás, akkor a G gráf minden élének rányításást fordítsuk meg a súlyok változatlanul hagyása mellett. Ha erre a gráfra alkalmazzuk a megoldást, akkor könnyen látható, hogy a ha kapott irányított utakban szereplő összes irányított élek irányítását megfordítjuk, akkor éppen a második probléma megldását kapjuk.

Definíció:. *Azt mondjuk, hogy a G gráfban adott egy D irányítás, ha tetszőleges i csúcshoz adott valamely az i-ből az 1-be vezető irányított út.*

Definíció:. *Valamely D irányítás forrásfüggetlen, ha bármely i csúcsra az i-be bemenő, valamely csúcsot az 1 csúccsal összekökő irányított utak i utáni közvetlen folytatása (az i ből kimenő irányított él) független az utak kezdetétől.*

Tétel:. *Valamely D irányítás akkor és csak akkor forrásfüggetlen, ha az irányításhoz tartozó tetszőleges $n_k = i, n_{k-1}, , ..., n_0 = 1$ irányított útra minden j $j = 1, 2, ..., k$-ra az $n_j, , ..., n_0 = 1$ a D irányításhoz tartozó, az n_j-t az 1-gyel összekötő irányított út.*

Bizonyítás. Legyen D tetszőleges forrásfüggetlen irányítás és legyen tetszőleges i-re $i = n_k, n_{k-1}, ..., n_0 = 1$ az i-ből az 1-be vezető, a D-hez tartozó irányított út. Legyen $1 \geq j \geq k$ tetszőleges. Ekkor az n_j-ből az 1-be vezető D-hez tartozó irányított út és az $i = n_k, n_{k-1}, ..., n_0 = 1$ D-hez tartozó irányított út egyaránt átmegy az n_j csúcson. D forrásfüggetlensége miatt az n_j-ből az 1-be vezető D-hez tartozó irányított út éppen az $n_j, ..., n_0 = 1$ irányított út.

Legyen D olyan irányítás, amelyre az irányításhoz tartozó tetszőleges $n_k = i, n_{k-1}, , ..., n_0 = 1$ irányított útra minden j-re, ahol $j = 1, 2, ..., k$, az

$n_j, , ..., n_0 = 1$ a D irányításhoz tartozó, az n_j-t az 1-gyel összekötő irányított út. Ekkor tetszőleges j csúcsra a j tartalmazó a D irányításhoz tartozó útra a j utáni folytatás megegyezik a j-t az 1-gyel összekötő a D-hez tartozó irányított úttal. Tehát D forrásfüggetlen.

A következőkben a Bellman-Ford, a Dijkstra valamint a Floyd-Warshall algoritmusokat tekintjük át a legrövidebb út meghatározásához. Az első kettő ezek közül valamely csúcstól az összes többi csúcshoz határozza meg a legrövidebb utat, míg a harmadik algoritmus az összes lehetséges különböző csúcspár esetén határozza meg a legrövidebb utat. Nincs olyan ismert módszer, amely csak valamely i és j csúcsok között határozza meg a legrövidebb utat. Ahhoz, hogy az i és j csúcsok között meghatározzuk a legrövidebb utat, meg kell határozni az i és az összes többi csúcs között a legrövidebb utat!

Alapvető cél továbbra is forrásfüggetlen irányítás meghatározása tetszőleges rendeltetési pont felé a G gráfban. Az adott rendeltetési pont irányába mutató legrövidebb utak elegendően tág feltételek mellett meghatározhatók úgy is, hogy azok forrásfüggetlen irányítást is képezzenek, így ezek az algoritmusok a gyakorlatban is alkalmazhatók.

A forrásfüggetlen irányítás meghatározásához természetesen más, elsősorban fokozatosan kiépítő algoritmusok is léteznek. Ezekbe az algoritmusokba politikai jellegű döntések is beépíthetők.

Bellman-Ford algoritmus

Tegyük fel, hogy az 1 címkével ellátott csúcs a kiinduló csúcs és ezen csúcsból az összes többi csúcsba vezető minimális irányítot utak meghatározása a feladat.Tegyük fel továbbá, hogy bár a d_{ij} távolságok lehetnek negatívak is, de tetszőleges irányított kör hossza nem negatív. A jelölések egyszerűsítése érdekében tegyük fel, hogy $d_{ij} = \infty$, ha $(i, j) \notin \mathcal{A}$.

Jelölje $D_i^{(h)}$ azon 1-ből az i csúcsba vezető utak hosszának minimumát, amelyek legfeljebb h élet tartalmaznak. Ha ilyen út nincs, akkor legyen $D_i^{(h)} = \infty$. Megegyezés szerint legyen $D_1^{(h)} = 0$ minden $h \geq 0$ esetén.

Tétel:. *Kezdetben*

$$D_i^{(0)} = \infty, \qquad \textit{minden} \quad i \neq 1$$

Minden egymásután következő $h \geq 0$*-ra,*

$$D_i^{(h+1)} = \min_{j \neq i}[D_j^{(h)} + d_{ji}] \qquad \textit{minden} \quad i \neq 1$$

Bizonyítás. Legyen $i \neq 1$ tetszőleges csúcs és legyen h tetszőleges nem negatív egész szám. Tegyük fel, hogy az 1 és az i csúcs között nem létezik legfeljebb $h+1$ élt tartalmazó út. Ekkor az értelmezés szerint $D_i^{(h+1)} = \infty$. Legyen j tetszőleges i-től különböző csúcs. A $D_j^{(h)}$ és a d_{ji} mindegyike nem lehet véges, hiszen ebből az következne, hogy a j és az i csúcsok között van irányított él és az 1 és a j csúcsok között van legfeljebb h élet tartalmazó út. Könnyen látató, hogy ekkor az 1 és az i csúcs között van legfeljebb $h+1$ élet tartalmazó út, ami ellentmondáshoz vezet. Ezért

$$\min_{j \neq i}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = \infty$$

tehát

$$D_i^{(h+1)} = \min_{j \neq i}[D_j^{(h)} + d_{ji}]$$

teljesül.

Tegyük fel, hogy az 1 és az i csúcs között létezik legfeljebb $h+1$ élt tartalmazó út. Ekkor a $D_i^{(h+1)}$ véges. Ekkor azon $j \neq i$ csúcsok $N'(i)$ halamaza, amelyekre igaz, hogy az 1 és j csúcsok között létezik legfeljebb h élet tartalmazó út és a j és az i között létezik irányított él, biztosan nem üres. Legyen $1, ..., k, i$ $D_i^{(h+1)}$ hosszúságú, legfeljebb $h+1$ élet tartalmazó út az 1 és az i csúcs között. Mivel az $1, ..., k$ út az 1 és a k csúcsokat összekötő, legfeljebb h élet tartalmazó út, ezért

$$D_i^{(h+1)} \geq D_k^{(h)} + d_{ki} \geq \min_{j \in N'(i)}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = \min_{j \neq i}[D_j^{(h)} + d_{ji}]$$

Legyen $k' \in N'(i)$ olyan index, amelyre

$$\min_{j \in N'(i)}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = D_{k'}^{(h)} + d_{k'i}$$

Legyen továbbá $1, ..., k'$ olyan út, amely hossza pontosan $D_{k'}^{(h)}$. Tekintsük az $1, ..., k', i$ bejárást. Ha ez nem út, mert az i csúcs előfordul az $1, ..., k'$ út mentén, akkor tekintsük az $1, ..., k'$ útnak az i csúcsig vezető $1, ..., k'', i$ részét. Ekkor mivel az $i, ..., k', i$ zárt irányitott kör, a feltevések szerint ezen kör hossza nem negatív, ezért az $1, ..., k''$ hossza $D_{k''}^{(h)}$ és

$$\min_{j \in N'(i)}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = D_{k''}^{(h)} + d_{k''i}$$

Tehát mindíg választhatunk olyan $k' \in N'(i)$ csúcsot, amlyre

$$\min_{j \in N'(i)}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = D_{k'}^{(h)} + d_{k'i}$$

és létezik olyan $1, ..., k'$ út, amely hossza $D_{k'}^{(h)}$ és az $1, ..., k', i$ is út. Mivel ez utóbbi út legfeljebb $h+1$ élből áll és hossza $D_{k'}^{(h)} + d_{k'i}$, ezért

$$\min_{j \neq i}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = \min_{j \in N'(i)}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = D_{k'}^{(h)} + d_{k'i} \geq D_i^{(h+1)}$$

Tehát a tétel állítása igaz.

Tetszőleges irányított út legfeljebb $N-1$ élt tartalmaz, ezért $D_i^{(N-1)} = D_i$, ahol D_i az 1-ből az i-be vezető legrövidebb irányított út hossza. Kiindulva tehát a fenti kezdeti értékekből és alkalmazva a tételben szereplő összefüggéseket, $N-1$ lépés után a legrövidebb utak hosszát kapjuk eredményül. A legrövidebb út meghatározásához ezt az algoritmust **Bellman-Ford algoritmusnak** neveznik.

A fenti tétel alapján a D_i értékek kielégítik a következő összefüggéseket:

$$D_i = \min_{j \neq i}[D_j + d_{ji}] \qquad \text{minden} \quad i \neq 1$$
$$D_1 = 0$$

Ezeket az egyenleteket **Bellman egyenleteknek** nevezik. A Bellman egyenletek azt fejezik ki, hogy a legrövidebb út hossza az 1 csúcstól az i csúcsig egyenlő a legrövidebb út hossza az 1 csúcstól az i-t megelőző csúcsig plusz az utolsó él hossza.

Ha ismerjük a Bellman-Ford algoritmus alapján kapott D_i értékeket, amelyek a Bellman egyenletek megoldásai és feltesszük, hogy tetszőleges az 1 csúcsot nem tartalmazó kör hossza pozitív, akkor egyszerűen megkonstruálhatjuk magukat a legrövidebb utakat is. Tetszőleges $i \neq 1$ csúcs esetén tekintsük azt a j csúcsot, ahol a Bellman egyenletekben a minimum eléretik a D_i legrövidebb utakat tekintve. Tekintsük minden $i \neq 1$-re a (j,i) irányított élt. Egyszerűen belátható, hogy a tetszőleges i-ből kiindúlva a kiválasztott élek mentén visszafelé a már érintett csúcsok nem ismétlődhetnek meg a körök hosszára tett megszorítás miatt. Ha ilyen ismétlődés létezne, akkor ezen irányított bejárás biztosan tartalmazna irányított kört. Legyen $k, m, ..., n, k$ egy ilyen irányított kör. Mivel a kiválasztás szerint

$$D_i = D_j + d_{ji} \qquad \text{minden} \quad i \neq 1$$

ezért

$$D_k = D_k + d_{km} + ... + d_{nk}$$

adódna, ami ellentmondás, mivel a $k, m, ..., n, k$ zárt kör az 1 pontot nem tartalmazhatja, mert az 1 pontba nem mutat egyetlen kiválasztott él sem és ezért a feltétel szerint $d_{km} + ... + d_{nk} > 0$.

A fentiekből következik, hogy barmely $i \neq 1$ csúcsból legfeljebb $N-1$ lépés után az 1 pontba jutunk. Az igy kiválasztott út hossza tetszőleges i esetén nyiván D_i. Az így kiválasztott részgráf éleinek száma $N-1$ és 1-től minden csúcshoz vezet irányított él, ezért ez a részgráf egy feszítő fa, de mivel a legrövidebb utakat tartalmazza, ezért a **legrövidebb utakat tartalmazó feszítő fának** nevezzük.

Tétel:. *Ha tetszőleges az 1 csúcsot nem tartalmazó kör hossza pozitív, akkor a Bellman egyenleteknek egyetlen megoldása létezik.*

Bizonyítás. Legyen $\tilde{D}_i \qquad i = 1, 2, ..., N$ a Bellman egyenelet egy megoldása. Legyenek $D_i^{(0)}$ a Bellman-Ford algoritmus kezedeti értékei. Ekkor

$$\tilde{D}_i \leq D_i^{(0)} \qquad i = 1, 2, ..., N$$

nyilván teljesül. Ebből viszont következik, hogy

$$\tilde{D}_i = \min_{j \neq i}[\tilde{D}_j + d_{ji}] \leq \min_{j \neq i}[D_j^{(h)} + d_{ji}] = D_i^{(h+1)}$$

igaz minden i-re és $h \geq 0$ egész értékre. Ennek igazolása teljes indukcióval történhet felhasználva, hogy a feltételek szerint $\tilde{D}_i$ értékek megoldják a Bellman egyenleteket. Az előzőek szerint

$$D_i^{(N-1)} = D_i \qquad i = 1, 2, ..., N$$

ahol D_i az 1 csúcsból az i csúcsba vezető legrövidebb út hosszát jelöli. Ezért

$$\tilde{D}_i \leq D_i \qquad i = 1, 2, ..., N$$

Felhasználva, hogy minden az 1 csúcsot tartalmazó irányított kör hossza pozitív, tetszőleges $i \neq 1$ csúcshoz megadható egy olyan az 1-ből az i-be vezető irányított út, amely hossza pontosan $\tilde{D}_i$. Ezért minden i-re

$$\tilde{D}_i \geq D_i \qquad i = 1, 2, ..., N$$

is teljesül, tehát a megoldás megegyezik a legrövidebb utak hosszával, tehát egyetlen megoldás létezik.

Dijkstra algoritmus

A továbbiakban tegyük fel, hogy minden él hossza pozitív. A Dijkstra-féle algoritmus gondolata az, hogy keressük meg a legrövidebb utakat ezen utak hosszának sorrendjében. Először tehát keressük meg a legrövidebb legrövidebb utat, azután a második legrövidebb utat, stb.

Tegyük fel, hogy már eljutottunk a csúcsok valamely P halmazáig, amelyre igaz, hogy tetszőleges P-beli csúcs közelebb van 1-hez, mint tetszőleges nem P-beli csúcs. Tegyük fel továbbá, hogy minden P-beli i csúcs esetén ismerjük az 1-től az i csúcsba vezető legrövidebb út hosszát és egy ilyen út utolsó i-be mutató élét, és minden nem P-beli i csúcs esetén ismerjük azon utak D_i minimális hosszát, amelyek az 1-ből az i-be vezetnek és amelyek mentén csak az i nem P-beli csúcs. Ha P-n kívül még van csúcs, akkor vegyük hozzá P-hez azt P-hez nem tartozó i csúcsot, amelyre a D_i a legkisebb. Legyen az i hez rendelt él annak az útnak az utolsó éle amely mentén D_i éléretik. Ezen i pont esetén igaz, hogy D_i az 1-ből az i-be vezető legrövidebb út hossza.

Részletesen az algoritmus a következő:

1. Legyen kezdetben

$$P = \{1\}, \quad D_1 = 0, \quad \text{és} \qquad D_j = d_{1j} \quad \text{minden} \quad j \neq 1$$

2. Keressük meg azon $i \notin P$, amelye

$$D_i = \min_{j \notin P} D_j$$

Legyen $P = P \cup \{i\}$ és jegyezzük meg azt az i-be mutató élet, amely része annak az útnak, amely mentén D_i eléretik. Ha P már minden csúcsot tartalmaz, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor folytatás a 3.-tól.

3. Minden $j \notin P$-re legyen

$$D_j = \min[D_j, D_i + d_{ij}]$$

Folytatás 1.-től.

Tétel:. *A fenti algoritmus szerint a P halmazba a csúcsok az 1-től mért távolságuk növekvő sorrendjében kerülnek. A utoljára kiszámolt D_i értékek minden i csúcs esetén az 1-től mért távolsággal egyenlő. A megjegyzett élek és a csúcsok egy legrövidebb utakat tartalmazó feszítő fát határoznak meg, amelynek gyökérpontja az 1 csúcs.*

Bizonyítás. A tételt a P számossága szerinti teljes indukcióval bizonyíthatjuk be.

Legyen $|P| = 1$. Az algoritmus alapján ekkor $P = \{1\}$, ezért az 1 csúcsnak önmagától mért távolsága 0 és ezért D_1, az utoljára kiszámított érték, valóban az 1 csúcsot az 1 csúccsal összekötő irányított utak minimális hossza, továbbá tetszőleges 1-től különböző csúcs, amelyek a P halmaz kiegészítő halmazát képezik, a $d_{ij} > 0$ feltéteélből adódóan mind az 1 pontnál távolabb vannak az 1-ponttól. Nyilván teljesül, hogy a P már meglevő elemei az 1-től mért távolságuk sorrendjében kerültek be a P halmazba. Mivel az 1-ből az 1-be vezető minimális hosszúságú út egyetlen élet sem tartalmaz, így a már megjegyzett élek és az 1 csúcs egy a P csúcsaiból álló, a minimális utakat tartalmazó feszítő fát határoznak meg. A $D_j = d_{1j}$ értékek tetszőleges $j \notin P$ esetén valóban azon utak minimális hosszát jelentik, amelyek az 1 pontot kötik össze a j ponttal és minden az őket képező csúcs P-beli, kivéve az utolsó j csúcsot.

Legyen $|P| = n$ és tegyük fel, hogy a tétel állítása igaz. Tegyük fel továbbá, hogy van még olyan csúcs a gráfban, amely még nem eleme a P halamaznak. Bővítsük ki a P halmazt az i csúccsal és módosítsuk a D_j értékeket a fenti algoritmus szerint, ha van még csúcs a gráfban amely nem eleme a $P \cup \{i\}$ halmaznak. D_i minimális tulajdonsága miatt az 1 csúcsot az i-vel összekötő minimális hosszúságú irányított út olyan tulajdonságú, amely az i csúcson kívül csak P-beli tartalmaz csúcsot tartalmaz. Ezért D_i az 1-ből az i-be vezető irányított utak minimális hosszát jelenti és minden más k, P-hez nem tartozó i-től különböző csúcs esetén az 1-ből a k-ba vezető irányított utak minimális hossza nem kisebb, mint D_i. Ha a kininduló P halmazt tekintjük és a P elemeihez már kiválasztott irányított éleket, akkor könnyen látható, hogy az i-hez kiválasztott irányított éllel együtt az igy kitüntetett élek a $P \cup \{i\}$ csúcsokkal együtt továbbra is fát alkotnak és ez a fa éppen a minimális utakat tartalmazó feszítő fa. Az indukciós feltevésből kiidulva és az új D_j értékek kiszámítási szabálya szerint, ezek a D_j értékek tetszőleges $j \notin P \cup \{i\}$ csúcsra azon 1-ből a j-be vezető irányított utak minimális hosszával egyenlők, amelyek a j csúcsot kivéve mind $P \cup \{i\}$-hez tartozóak. Ezért abból a feltevésből, hogy a tétel állítása igaz $|P| = n$-re, következett, hogy igaz $|P| = N + 1$-re is.

Tehát a tétel állítása igaz.

Floyd-Warshall algoritmus

Ez az algoritmus az előző kettőtől eltérően minden i és j csúcspár esetén meghatározza az i-ből a j-be vezető legrövidebb út hosszát. Hasonlóan a Bellman-Ford algoritmushoz, tegyük fel, hogy az élek hossza lehet negatív is, de bármely kör hossza nem negatív.

A gráfban előforduló csúcsokat jelöljük rendre $1, 2, ..., N$-nel. Legyen $D_{ij}^{(n)}$ azon legrövidebb irányított út hossza, amely az i csúcsból a j csúcsba vezet és legfeljebb az $1, 2, ..., n$ csúcsokat tartalmazza.

Tétel:. *A $D_{ij}^{(n)}$ értékere igazak a következő összefüggések:*

$$D_{ij}^{(0)} = d_{ij} \quad \textit{minden} \quad i, j \quad i \neq j$$

$n = 0, 1, 2, ..., N - 1$*-re*

$$D_{ij}^{(n+1)} = \min[D_{ij}^{(n)}, D_{i(n+1)}^{(n)} + D_{(n+1)j}^{(n)}] \quad \textit{minden} \quad i \neq j$$

Bizonyítás.

A fenti tétel alapján a $D_{ij}^{(N)} = D_{ij}$, az i-ből a j csúcsba vezető minimális hosszúságú út hossza N számú iterációs lépés után adódik.

Osztott aszinkron Bellman-Ford algoritmus

Legyen $G = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ irányított gráf, amely erősen összefüggő. Tekintsünk egy forgalomirányító algoritmust, amely a legrövidebb út mentén továbbítja a csomagokat a forrásponttól a rendeltetési pontig. Valós körülmények között a közvetlen irányított kapcsolatok hossza változhat részint azért, mert ezek a kapcsolatok meghibásodhatnak, részint amiatt, hogy olyan mértéket választottunk, amely eredendően időfüggő (pl. várakozó sorok hossza a kimeneteknél, átlagos késleltetési idők a kapcsolatokon, stb). Mindezekből adódóan szükséges a legrövidebb utak illesztése a megváltozott körülményekhez.

A továbbiakban feltesszük, hogy bármely (i, j) él d_{ij} hossza pozitív, és minden i és j különböző csúcspárra, ha (i, j) irányított él, akkor (j, i) is irányított él a gráfban. Elvben nem zárjuk ki, hogy a d_{ij} értékek időben változhatnak. A következőkben azonban a Bellman-Ford algoritmus egy olyan változatát vizsgáljuk meg, ahol a d_{ij} értékek nem változnak, de a kezdeti feltételek viszonylag tág határok között választhatók meg. Ez a modell megfelel a valóságnak, ha a d_{ij} értékekről csupán azt tételezzük fel, hogy valamely t_0 időpont után már nem változnak. Mivel a d_{ij} értékek a t_0 időpont előtt változhattak, ezért tetszőleges i csúcs esetén a D_i legrövidebb út hossza a legrövidebb úttal együtt, csak közelítő értéknek tekinthető.

A következőkben D_i valamely i forráscsúcstól valamely generikus 1 rendeltetési csúcshoz vezető legrövidebb irányított hosszát jelöli és érdekeltek vagyunk tetszőleges i esetén a D_i, valamint az i-ből az 1-be vezető legrövidebb út meghatározásában. A Bellman-Ford algoritmus éppen a fordított irányú problémára ad megoldást (1-ből i-be), de könnyen belátható, hogy erre az esetre is ugyanolyan szerkezetű egyneletek írhatók fel, mint a már tárgyalt esetben. Nevezetesen a D_i értékek megoldják a következő egyenleteket:

$$D_i = \min_{j \in N(i)} [d_{ij} + D_j] \qquad \text{minden} \quad i \neq 1$$
$$D_1 = 0$$

ahol $N(i)$ jelöli az i csúcs aktuális környezetét, azon j csúcsok halmazát, amelyekre az (i,j) él aktuálisan létező.

A Bellman-Ford algoritmust a következöképpen lehet megadni:

$$D_i^{(h+1)} = \min_{j \in N(i)} [d_{ij} + D_j^{(h)}] \qquad \text{minden} \quad i \neq 1$$
$$D_1^{(h+1)} = 0$$

A konvergencia a legrövidebb úthosszhoz biztosítható, ha a kezdeti feltételekre

$$D_i^{(0)} = \infty \qquad \text{minden} \quad i \neq 1$$
$$D_1^{(0)} = 0$$

Az algoritmus párhuzamosítható, mivel az iteráció lépései az egyes csúcsokban egyidejűleg párhuzamosan hajthatók végre. Az algoritmus egy lehetséges párhuzamosított formája a következő:

Minden csúcs egyidejűleg kiszámítja a $(h+1)$-edik közelítés értékét, a kapott eredményt szintén egyidejűleg továbbítja az összes szomszédos csúcs felé, majd a h növelése után a következő közelítés számítható ki az egyes csúcsoknál az egyenleteknek megfelelően. Ha a kezdeti feltételeket a fentiek szerint választjuk meg, akkor legfeljebb $N-1$ iterációs lépés után (N a csúcsok száma) az egyes csúcsoknál ismeretesek a D_i értékek és a legrövidebb út irányába való elmozdulás.

A gyakorlatban azonban a műveletek egyidejű végrehajtása komoly nehézségekbe ütközik és nehezen egyeztethető az algoritmus elkezdése is.

Megoldást jelentene a problémákra, ha eltekinthetnénk a szigorú szinkronitástól és a kezdeti feltételek előzőekben előírt megválasztásától.

A lehetséges algoritmus a következő műveletek végrehajtását jelentené az egyes csúcsoknál "időről-időre"

$$D_i = \min_{j \in N(i)} [d_{ij} + D_j]$$

felhasználva a legutóbbi D_j becsléseket, amelyeket az illető csúcs a szomszéd csúcsoktól kapott és a kimenő élek aktuális státuszát. Minden csúcsnál gondoskodni kellene arról is, hogy a legutóbbi D_i becslés "időről-időre" eljusson a szomszédos csúcsok mindegyikéhez. Azonban a műveletek szigorúan egyidejű végrehajtását el kellene vetni.

Az aszinkron Bellman-Ford algoritmus megfogalmazásához a következő jelölések és feltételezések szükségesek.

Minden t időpillanatban rendelkezésre állnak a következők:

$D_j^i(t)$: Az i csúcsnál a legrövidebb út hosszára vonatkozó becslés minden az i környezetében levő j csúcsra, amely a legutóbbi, a j-től kapott adat.

$D_i(t)$: Az i csúcsnál a Bellman-Ford algoritmus szerint a legutóbb kiszámított becslés a legrövidebb út hosszára vonatkóan.

A legrövidebb út hosszára vonatkozó becslés az 1 csúcsnál

$$D_1(t) = 0 \qquad \text{minden} \quad t \geq t_0$$
$$D_1^i(t) = 0 \qquad \text{minden} \quad t \geq t_0, \quad \text{és} \quad i\text{-re}, \quad \text{amelyre} \quad 1 \in N(i)$$

Bármely i csúcs ismeri a d_{ij} kimenő élek hosszát minden $j \in N(i)$-re. A d_{ij} értékek minden különböző i és j csúcspár esetén pozitívak és a t_0 időpont után már nem változnak.

Feltesszük továbbá, hogy a legrövidebb út hosszára vonatkozó becslések az egyes csúcsoknál legfeljebb csak a $t_0, t_1, t_2, \ldots$ időpontokban változnak, ahol a $t_{m+1} > t_m$ minden m-re és $t_m \to \infty$, ha $m \to \infty$.

Tetszőleges $i \neq 1$ csúcsnál a t_m időpillanatban a következő események valamelyike következik be:

1. Az i csúcs új becslést állapít meg a $D_i(t)$ értékre

$$D_i(t) = \min_{j \in N(i)} [d_{ij} + D_j^i(t)]$$

   alapján és a $D_j^i(t), j \in N(i)$ értékeket változatlanul hagyja.
2. Az i csúcs egy vagy több szomszédos $j \in N(i)$ csúcstól fogadja a $D_j(t)$ értéket és felülírja vele a $D_j^i(t)$ értéket. A többi becslést változatlanul hagyja.
3. Az i csúcsnál nem történik semmi, minden becslés az i csúcsnál változatlan marad.

Legyen T^i azon időpontok halmaza a fenti sorozatból, amelyekben az 1.-ben leírt esemény következik be az i csúcsnál és legyen T_j^i azon időpontok halmaza a sorozatból, amikor az i csúcs új becslést fogad a j csúcstól a 2.-ben leírtaknak megfelelően.

1. Feltétel. *A T^i és T_j^i halmazok végtelen számosságúak minden $i \neq 1$ és minden $j \in N(i)$ esetén. Az egyes csúcsoknál az újabb becslések kiszámítása és a szomszédos csúcsoktól a becslések fogadása soha nem fejeződik be.*

2. Feltétel. *Minden $D_i(t_0)$ és $D_j^i(t_0), j \in N(i)$ nem negatív. Továbbá nem negatív minden olyan becslés is, amely a t_0 pilanat előtt lett elindítva, de csak a t_0 után érkezik meg a rendeltetési helyre.*

3. Feltétel. *Tetszőleges $\bar{t} \geq t_0$ pillanathoz megadható olyan $\tilde{t} \geq \bar{t}$, hogy azok a D_j becslések, amelyek a j csúcsnál lettek kiszámítva a $\bar{t}$ időpont előtt, már egyetlen $j \in N(i)$ csúcsnál sem kerülnek fogadásra a $\tilde{t}$ időpont után. A régi legrövidebb út hosszára vonatkozó becslések szükségképpen felülíródnak.*

Tétel.. *Az 1., 2. és a 3. feltételek teljesülése esetén létezik olyan t_m időpont amelyre*

$$D_i(t) = D_i, \qquad \text{minden} \quad t \geq t_m, i = 1, ..., N$$

ahol D_i az i-ből az 1 csúcsba vezető legrövidebb út hosszának pontos értéke.

Bizonyítás. A bizonyítás alapgondolata, hogy minden i csúcshoz megadhatók olyan $\{\underline{D}_i^k\}$ és $\{\overline{D}_i^k\}$ sorozatok, amelyekre

$$\underline{D}_i^k \leq \underline{D}_i^{k+1} \leq D_i \leq \overline{D}_i^{k+1} \leq \overline{D}_i^k$$

és

$$\underline{D}_i^k = D_i = \overline{D}_i^k \qquad \text{elegendően nagy} \quad k\text{-ra}$$

A jelzett tulajdoságú sorozatok megalkotsához a Bellman-Ford iteráció következő monotonitási tulajdonságát kell kihasználni. Legyenek $\overline{D}_j$ és $\tilde{D}_j$ olyan értékek, amelyekre

$$\overline{D}_j \geq \tilde{D}_j \qquad \text{minden} \quad j \in N(i)$$

ekkor könnyen látható, hogy

$$\min_{j \in N(i)} [d_{ij} + \overline{D}_j] \geq \min_{j \in N(i)} [d_{ij} + \tilde{D}_j]$$

Ezekből következik, hogy ha D_i^k a Bellman-Ford iterációval kapott sorozat valamely D_i^0, $i = 1, 2, ...N$ kiindulási értékek esetén, amelyre $D_i^1 \geq D_i^0$ minden i-re, akkor, akkor $D_i^{k+1} \geq D_i^k$ minden i-re és k-ra. Hasonlóan, ha $D_i^1 \leq D_i^0$ minden i-re, akkor $D_i^{k+1} \leq D_i^k$ minden i-re és k-ra.

Legyen $\overline{D}_i^k$ a Bellman-Ford iteráció k-adik lépésében kapott eredmény, ahol a kezdeti feltételekre

$$D_i^{(0)} = \infty \qquad i \neq 1$$
$$D_1^{(0)} = 0$$

Hasonlóan, legyen $\underline{D}_i^k$ a Bellman-Ford iteráció k-adik lépésében kapott eredmény, ahol a kezdeti feltételekre

$$D_i^{(0)} = 0 \qquad i = 1, 2, ..., N$$

Könnyen látható, hogy a $\overline{D}_i^k$ és $\underline{D}_i^k$ sorozatokra teljesül

$$\underline{D}_i^k \leq \underline{D}_i^{k+1} \leq D_i \leq \overline{D}_i^{k+1} \leq \overline{D}_i^k$$

A $d_{ij} > 0$ minden i és j-re feltétel miatt

$$\overline{D}_i^k = D_i \qquad k \geq N-1$$

Igazolni kell, hogy elegendően nagy k-ra $\underline{D}_i^k = D_i$ is teljesül. Teljes indukcióval könnyen igazolható, hogy minden k-ra $\underline{D}_i^k$ legfeljebb k számú él távolságának összege. Mivel $\underline{D}_i^k \leq D_i$, ezért minden k-ra $\underline{D}_i^k$ legfeljebb

$$\frac{\max_i D_i}{\min_{ij} d_{ij}}$$

számú él távolságának összege, ezért a lehetséges $\underline{D}_i^k$, $i = 1, 2, ..., N$ és $k = 0, 1, ...$ értékek halmaza véges. Ebből következik, hogy megadható olyan $\overline{k}$ küszöb, amelyre

$$\underline{D}_i^{\overline{k}} = \underline{D}_i^{\overline{k}+1} \qquad \text{minden} \quad i = 1, 2, ..., N$$

tehát az $\underline{D}_i^{\overline{k}}$ értékek megoldják a Bellman-Ford egyenleteket. A már hivatkozott feltevések alapján a megoldás egyértelműsége miatt

$$\underline{D}_i^k = D_i \qquad \text{minden} \quad i = 1, 2, ..., N, \quad k \geq \overline{k}$$

A tétel állításának bizonyításához elegendő belátni, hogy tetszőleges $k \geq 0$ értékhez megadható olyan $t(k)$, hogy minden t-re, amelyre $t \geq t(k)$

$$\underline{D}_i^k \leq D_i(t) \leq \overline{D}_i^k \qquad i = 1, 2, ..., N$$
$$\underline{D}_i^k \leq D_j^i(t) \leq \overline{D}_i^k \qquad j \in N(i), i = 1, 2, ..., N$$

és minden t-re, amelyre $t \in T_j^i, t \geq t(k)$

$$\underline{D}_j^k \leq D_j(\tau_j^i(t)) \leq \overline{D}_j^k \qquad j \in N(i), i = 1, 2, ..., N$$

ahol $\tau_j^i(t)$ jelöli azt a legkésőbbi időpontot amelynél az i-ben rendelkezésre álló $D_j^i(t)$ a j-ben kiszámításra került.

A bizonyítás teljes indukcióval történik. $k = 0$ esetén $t(0) = t_0$ alkalmas választás a kezdeti értékekre, valamint a t_0 előtt kiszámított, de csak t_0 után átadott értékekre tett feltétel miatt. Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely k-ra. Akkor felhasználva a Bellman-Ford iteráció monotonitását, kapjuk, hogy minden $t \in T^i$ és $t \geq t(k)$-ra

$$\underline{D}_i^{k+1} \leq D_i(t) \leq \overline{D}_i^{k+1}$$

Válasszuk ki minden $i = 1, 2, ..., N$-re a legkisebb olyan $t \in T^i$, amelyre $t \geq t(k)$ és tekintsük ezek közül a legnagyobbat.Legyen ez az érték $t'(k)$. Ekkor

$$\underline{D}_i^{k+1} \leq D_i(t) \leq \overline{D}_i^{k+1} \qquad \text{minden} \quad t \geq t'(k), \quad i = 1, 2, ..., N$$

Az 1. és 3. feltételek miatt $\tau_j^i(t) \to \infty$ ha $t \to \infty$ minden i és j-re. Válasszuk meg a $t(k+1) \geq t'(k)$ értéket úgy, hogy $\tau_j^i(t) \geq t'(k)$ teljesüljön minden i és j-re. Ekkor minden $t \geq t(k+1)$-re

$$\underline{D}_j^{k+1} \leq D_j^i(t) \leq \overline{D}_j^{k+1} \qquad \text{minden} \quad t \geq t(k+1), \quad j \in N(i), i = 1, 2, ..., N$$

és minden t-re, amelyre $t \in T_j^i, t \geq t(k+1)$

$$\underline{D}_j^{k+1} \leq D_j(\tau_j^i(t)) \leq \overline{D}_j^{k+1} \qquad j \in N(i), i = 1, 2, ..., N$$

Ezzel a tétel állítása bizonyítást nyert.